Chapitre 12

Espaces vectoriels : partie 1

I Structure d'espace vectoriel

1) L'exemple de $\mathbb{R}^n$

a) Rappels et notations

Définition 1

Soit E un ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E^n l'ensemble $\underbrace{E \times E \times \dots E}_{n \text{ fois}}$

- Les éléments de E^n sont appelés $n-uplets$ d'éléments de E, ou $n-$ listes en dénombrement et probabilité, ou encore *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$.
- Si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un $n-$uplet, on dit que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les composantes du n-uplet.
- Le n-uplet $(0, 0, 0, \dots, 0)$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$. (lire : "zéro de $\mathbb{R}^n$")

b) Addition

On munit $\mathbb{R}^n$ de l'opération d'addition de la façon suivante :

Définition 2

Soient $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.
On définit l'opération $u + v$ par :

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Autrement dit : on additionne composante par composante.

- Comme u et v sont des éléments de $\mathbb{R}^n$, on dit que l'opération $+$ est "interne".
- On remarque que $u + v \in \mathbb{R}^n$: on dit que $\mathbb{R}^n$ est stable par addition.

Exemple :
si $u = (1, 4, 5, 6)$ et $v = (1, -2, 4, -3)$, alors $u + v =$

Propriété 1

Soient u, v et w trois n-uplets de $\mathbb{R}^n$, alors on a :
(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (associativité)
(ii) $u + v = v + u$. (commutativité)
(iii) $u + 0_{\mathbb{R}^n} = u$ ($0_{\mathbb{R}^n}$ est neutre pour $+$)
(iv) il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $u + x = 0_{\mathbb{R}^n}$ (x est l'opposé de u)

▷ *Preuve* : Immédiat en utilisant les propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}$. ◁

c) Multiplication par un "scalaire"

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une opération de multiplication par un nombre de la manière suivante :

Définition 3

Soit $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit le n-uplet λu par

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

- Comme λ n'appartient pas à $\mathbb{R}^n$, on dit que l'opération est "externe".
- On observe que $\lambda u \in \mathbb{R}^n$: l'espace $\mathbb{R}^n$ est stable par multiplication par un scalaire.

Exemple :
si $u = (0, 1, -2)$, alors $3u =$

Propriété 2

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, u et v deux éléments de $\mathbb{R}^n$, alors on a :
(i) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ *(distributivité à droite)*
(ii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *(distributivité à gauche)*
(iii) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ *(associativité)*
(iv) $1.u = u$ *(neutre pour la multiplication)*

▷ *Preuve :* Encore une fois immédiat via les propriétés de multiplication des réels. ◁

On peut "combiner" la somme et la multiplication externe pour faire des combinaisons linéaires :

Définition 4

Soient u et v deux n uplets. On appelle combinaison linéaire de u et de v toute n uplet w s'écrivant

$$w = \lambda u + \nu v$$

où λ et ν sont des réels.

Exemples :
- $(5, -6, 2) = 3(1, 0, 2) - 2(-1, 3, 2)$ est une combinaison linéaire de $u = (1, 0, 2)$ et $v = (-1, 3, 2)$.
- Soit $u = (1, -1, 1)$ et $v = (2, 0, 3)$. Montrons que $w = (0, -2, -1)$ est une combinaison linéaire de u et v :

2) Espaces vectoriels

a) Définitions :

Les opérations définies définies précédemment sont les mêmes que celles qui ont lieu sur les vecteurs en géométrie. On peut les définir de façon analogue dans de nombreux ensembles, dont $\mathbb{R}^n$.
Tous les ensembles qui ont ces propriétés sont alors appelés "espaces vectoriels". Plus précisément :

Définition 5

On appelle $\mathbb{R}-$espace vectoriel tout ensemble non vide E muni de deux lois :

- ◊ *une loi $+$ (dite interne) telle que, pour tout u,v,w élements de E on a :*
  - *(i)* $u+v \in E$ *(E est stable par $+$)*
  - *(ii)* $u+v=v+u$ *(commutativité)*
  - *(iii)* $(u+v)+w=u+(v+w)$ *(associativité)*
  - *(iv) il existe un élement noté O_E tel que, pour tout u, $u+O_E=u$ (existence d'un neutre pour $+$)*
  - *(v) Pour tout u, il existe $v \in E$ tel que $u+v=O_E$ (existence d'un inverse pour $+$)*
- ◊ *une loi de multiplication (dite externe) par un élément de $\mathbb{R}$, notée $.$, vérifiant, pour tout u, v de E et tout λ, μ dans $\mathbb{R}$:*
  - *(vi)* $\lambda.u \in E$ *(E est stable par $.$)*
  - *(vii)* $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$ *(distributivité à droite)*
  - *(viii)* $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ *(distributivité à gauche)*
  - *(ix)* $(\lambda\mu)u=\lambda(\mu u)$
  - *(x)* $1.u=u$

A noter : *Vocabulaire*

- ▶ Par analogie avec la géométrie, un élément $u \in E$ est appelé "vecteur" et est généralement noté $\vec{u}$.
  Néanmoins, si il n'y a pas de confusion entre les vecteurs et les scalaires, on abandonne souvent les flèches au dessus des vecteurs. Ainsi, dire $u \in E$ en considérant que E est un espace vectoriel suffit pour dire que u est un vecteur.
- ▶ Un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé *scalaire*.
- ▶ O_E est appelé vecteur nul. Il est parfois noté $\vec{0}$.

b) Exemples : espaces vectoriels de référence à connaître !

L'ensemble $\mathbb{R}^n$:
Muni de l'addition et de la multiplication telle que rappelée en début de chapitre, l'ensemble des $n-$uplets de $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
Le vecteur nul est

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:
On a vu que pour additionner deux matrices de même taille, on additionnait terme à terme pour obtenir une matrice de même taille. De même, on a défini la multiplication par un scalaire en multipliant tous les coefficients de la matrice.

Ainsi, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de ces opérations est donc, comme $\mathbb{R}^n$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Le vecteur nul est alors

L'ensemble des applications d'un ensemble I dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$
Soit f et g deux applications définies sur I à valeur dans $\mathbb{R}$.

On définit $f + g$ comme étant l'application $x \mapsto f(x) + g(x)$,
et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$.

On peut alors vérifier les 10 propriétés définissant un espace vectoriel.
Le vecteur nul est

L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des polynômes :
Les polynômes ont été vu comme des fonctions, mais surtout on a vu que la somme de polynômes est un polynôme, de même que la multiplication par un scalaire.

On a donc à nouveau les dix propriétés de l'espace vectoriel et donc $\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel.
Le polynôme qui joue le rôle du vecteur nul est

L'ensemble des suites réelles
C'est un cas particulier de l'ensemble $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ où $I = \mathbb{N}$, et c'est donc un espace vectoriel et le vecteur nul est

c) Combinaisons linéaires

Définition 6

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ p vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit qu'un vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \ldots u_p$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

Exemples :

- $(2, 1, 0)$ est combinaison linéaire de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(1, 1, 0)$:

- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de I_3 et d'une matrice N nilpotente :

- $P(x) = x^2 + 3x - 1$ est combinaison linéaire de

Définition 7

On note $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $u_1, u_2, \ldots, u_n$

Exemples :

- Dans l'exemple précédent $(2,1,0) \in Vect\,((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0))$.
  On a par exemple aussi $(3,2,0) \in Vect\,((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0))$, puisque
  $$(3,2,0) = 2(1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,0)$$
  En revanche, $(1,1,1) \notin Vect\,((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0))$ car

- Le polynôme $P = x^2 + 3x - 1$ est une combinaison linéaire de x^2, x et 1, donc $P \in \text{Vect}(x^2, x, 1)$

  En fait, tout les polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$ sont des combinaisons linéaires de x^2, x et 1, puisqu'ils s'écrivent $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels.
  Ainsi $\mathbb{R}_2[x] = \text{Vect}(x^2, x, 1)$

II Sous espaces vectoriels

Dans toute cette section, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) Généralités :

a) Definition

Définition 8

Soit $F \subset E$. *On dit que* F *est un sous espace vectoriel de* E *si et seulement si c'est un ensemble non vide et stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire :*

(i) $F \neq \emptyset$

(ii) $\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda u + \mu v \in F$

Exemples

- $\mathbb{R}^n$ est un sous espace vectoriel de lui même.
- $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ est un sous espace vectoriel également...
- Dans $E = \mathbb{R}^2$, l'espace $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$ est un s.e.v :
  En effet,

▶ $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$:

Propriété 3

Si F est un sous espace vectoriel de E, alors $\vec{0} \in F$

▷ *Preuve :* Si F est un sous espace vectoriel, alors $\forall u, v \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in F$.
En prenant $\lambda = \mu = 0$, on obtient $\vec{0} \in F$. ◁

Alternative
On peut avoir besoin d'une caractérisation plus longue a priori, mais parfois plus simple :

Proposition 1

F est un sous espace vectoriel si et seulement si
(i) $0_E \in F$ (F contient le vecteur nul)
(ii) pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}$ de F, $\vec{u} + \vec{v} \in F$ (stabilité pour la loi $+$)
(iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\vec{u} \in F$, $\lambda \vec{u} \in F$ (stabilité pour la multiplication externe)

Exemple :
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :

b) Intersection de sous espaces vectoriels

Proposition 2

Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E également.

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
Dans $\mathbb{R}^3$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0\}$ sont des sous espaces vectoriels, donc $E \cap F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0 \text{ et } z = 0\}$ est un sous espace vectoriel.

Danger ! *Union d'espace vectoriel*
En général, l'union de sous espace vectoriel n'est pas un espace vectoriel !

Exemple :
Soit E l'ensemble des polynômes constants et F l'ensemble des polynômes de la forme aX avec $a \in \mathbb{R}$.
On montre facilement que E et F sont des s.e.v de l'ensembles des polynômes.
Mais $E \cup F$ n'est pas un s.e.v :

2) Sous espace vectoriel engendré

Rappel : si $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p)$ est une liste de vecteurs (on dit aussi "famille de vecteurs"), on note $\text{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.

a) Définition

Proposition 3 (*et définition*)

Soient $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
Alors l'ensemble $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous espace vectoriel de E.
Il est appelé sous espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, u_2, \dots u_p)$.

▷ *Preuve :*

◁

Remarque :
Comme dit dans la preuve, si un espace vectoriel contient les vecteurs $u_1, u_2, \dots u_p$, alors, comme E est stable par combinaisons linéaires, il contient nécessairement toutes les combinaisons linéaires des u_i, c'est à dire que $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots u_p) \subset E$: on dit que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit sous espace vectoriel contenant les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$.
Ceci se traduit par la proposition suivante :

Proposition 4

Soit E un sous espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset E$.

b) Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

2. Soit $E = \{(x, 3x + y, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

A noter : *Non unicité !*
Des vecteurs différents peuvent engendrer le même espace.
Par exemple avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, on a $\text{Vect}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$, mais on peut montrer aussi $\text{Vect}((0, 2), (-3, 0)) = \mathbb{R}^2$, ou encore : $\text{Vect}((1, 1), (-1, 1)) = \mathbb{R}^2$...

3) Familles génératrices

Définition 9

Soit E un espace vectoriel et soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que cette famille est génératrice de E si et seulement si $E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots u_n)$.

Exemple :

1. On a vu que $\mathbb{R}_2[x]$ peut s'écrire comme $\text{Vect}(1, x, x^2)$. Ainsi, les trois polynômes 1, x et x^2 constituent une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Dans l'exemple 2 page 8, $(1, 3, 0)$ et $(0, 1, 1)$ est une famille génératrice de l'ensemble $E = \{(x, 3x + y, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. Soit E l'ensemble des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.

Méthode : *Montrer qu'une famille est génératrice*

Pour montrer qu'une famille est génératrice d'un s.e.v E, on peut procéder de la façon suivante :

- ▶ Les vecteurs de la famille sont-ils bien dans E ?
  Si oui, on a déjà $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset E$
- ▶ On considère ensuite un vecteur $u \in E$ et on cherche des λ_i tel que

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$$

Autrement dit : est-ce que u est combinaison linéaire des vecteurs de notre famille ?.
Si on trouve **au moins une solution**, et ce quel que soit u, alors $E \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

- ▶ Par double inclusion, on a alors $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Exemple :
Montrons que $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (0, 2)$ constituent une famille génératrice de $E = \mathbb{R}^2$:

III Familles de vecteurs dans un s.e.v.

Un des intérêts des espaces vectoriels est qu'ils peuvent être décris par un faible nombre de vecteurs. Plus précisément, il va y avoir des familles qui engendrent tout l'espace, et parmi ces familles, certaines sont plus intéressantes que d'autres...

1) Familles libres ou liées

a) Idée :

Quand on a une famille de vecteurs, on essaie de rendre cette famille "minimale". Reprenons l'exemple en bas de la page 4, avec $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(1,1,0)$.
On a vu qu'il y avait plusieurs façon d'écrire $(2,1,0)$ en fonction de ces trois vecteurs. La raison est que le dernier (par exemple) s'écrit comme somme des deux premiers et n'est donc pas "utile".
Ces trois vecteurs sont donc "liés" par une relation de combinaison linéaire... ce qui donne la définition ci-après !

b) Définitions

Définition 10

*Une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est dite liée si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ des réels **pas tous nuls** tels que*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots \lambda_p u_p = O_E.$$

Au secours ! *ça veut dire quoi ?*
Cette définition, abstraite, est la façon la plus maniable mathématiquement pour dire qu'au moins un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
En effet, si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots \lambda_p u_p = \vec{0}$ avec par exemple $\lambda_1 \neq 0$, on a alors

$$\lambda_1 u_1 = -\lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_p u_p, \text{ d'où } u_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_p u_p)$$

Ainsi, u_1 s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Dans l'exemple de la page 4, on a $(1,0,0) + (0,1,0) - (1,1,0) = (0,0,0)$ ce qui est bien équivalent à $(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0)$.

Au contraire, quand une famille n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre** :

Définition 11

Une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est dite libre si et seulement si elle n'est pas liée, c'est à dire si et seulement si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots \lambda_p u_p = \vec{0} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

Cela signifie qu'aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres : la famille est en quelque sorte "minimale"....

Méthode : *Montrer qu'une famille est libre / liée*

Pour tester si une famille u_1, u_2, …, u_p est libre ou liée, on résout l'équation d'inconnue $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots \lambda_p u_p = 0_E$$

Si on trouve des solutions non nulles, c'est que la famille est **liée**. Si la seule solution est

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

alors la famille est libre.

c) Exemples

1. $((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0))$ est une famille liée, car on peut écrire :

$$(1,0,0) + (0,1,0) - (1,1,0) = (0,0,0)$$

2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, la famille $(1,4,0),(1,2,1),(-1,0,-2)$ est

3. Soient $\vec{u}_1 = (1,0,1)$, $\vec{u}_2 = (0,1,1)$ et $\vec{u}_3 = (1,1,0)$. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est

4. Montrons que la famille de polynômes $(1, x, x^2)$ est libre :

Remarque :
Une famille qui contient un vecteur colinéaire à un autre est toujours liée.
En effet, soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ tel que $u_2 = \lambda u_1$ avec $\lambda \neq 0$ par exemple, alors on a

$$-\lambda u_1 + u_2 + 0u_3 + \ldots + 0u_p = O_E$$

Ainsi, on a une combinaison linéaire avec des coefficients non nuls qui donne le vecteur nul : la famille est liée.
Exemple : $\mathcal{F} = \{(1,2,3),(5,1,0),(2,4,6)\}$ est liée car on a déjà $(1,2,3)$ et $(2,4,6)$ colinéaires.

Remarque :
Une conséquence de cette situation est que toute famille contenant le vecteur nul est liée !

d) Cas des familles d'applications

Pour montrer que des familles d'applications (ensemble de fonctions, de suites, de polynômes, ect...) sont libres ou liées, une technique efficace est de choisir des valeurs particulières de la variable pour retomber sur des systèmes "classiques".
Exemple : Soit $f_1 = 1$ et $f_2 = X$ et $f_3 = X^2$. Montrons que f_1, f_2, f_3 est une famille libre.
Supposons que $\lambda + \mu X + \nu X^2 = O$ où O est le polynôme nul.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda + \mu x + \nu x^2 = 0$ (cette fois 0 est le "vrai" 0)
Cela doit marcher en particulier pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$, ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda & = 0 \\ \lambda + \mu + \nu & = 0 \\ \lambda - \mu + \nu & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \lambda & 0 \\ \mu + \nu & = 0 \\ -\mu + \nu & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

La famille est donc libre.

e) Cas particulier : famille de deux vecteurs

Proposition 5

Soit $\mathcal{F}$ une famille de deux vecteurs u_1, u_2.

Alors $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, c'est à dire si et seulement si il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_1 = \lambda u_2$ ou $u_2 = \lambda u_1$.

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
$(1,3,0)$ et $(0,1,1)$ constituent une famille libre, car les vecteurs ne sont pas colinéaires.
En revanche, $(1,3,0)$ et $(-2,-6,0)$ sont liés, puisque $(-2,-6,0) = -2(1,3,0)$.

Danger ! *Erreur fréquente :*
Ce raisonnement n'est valable que pour deux vecteurs. Vous pouvez tout à fait avoir 3 vecteurs avec aucun colinéaire aux autres, mais que la famille soit liée quand même.
C'est le cas des vecteurs $(1,0,0),(0,1,0)$ et $(1,1,0)$ qui sont liés sans être colinéaires pour autant.

2) Bases

a) Définitions

Définition 12

On appelle base d'un espace vectoriel E toute famille à la fois génératrice et libre.

Proposition 6

Si un espace vectoriel admet une famille finie comme base, alors toutes les bases de cet espace ont le même nombre d'éléments et on appelle dimension de E, noté $dim(E)$, le cardinal commun à ces bases.

▷ *Preuve :*

◁

Exemples :

- Prenons $E = \mathbb{R}^2$. On peut montrer facilement que $E = \text{Vect}((1,0),(0,1))$. La famille $(1,0)$ et $(0,1)$ est donc génératrice. De plus elle est libre, car les vecteurs ne sont pas colinéaires.
  C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$ et la dimension de $\mathbb{R}^2$ est 2.
- Dans $E = \mathbb{R}^n$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...0)$ où le 1 est la $k$ième composante.
  Montrons que la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est libre :

  C'est donc une base de $\mathbb{R}^n$, et c'est la base la plus naturelle : on l'appelle "base canonique" de $\mathbb{R}^n$.
- Dans $\mathbb{R}_2[x]$, on a vu que $(1, x, x^2)$ est une famille génératrice et libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et cet espace est de dimension 3.

  De manière général, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, X, \dots X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ qui est donc de dimension

- L'ensemble des polynômes (sans précision de degré) a une base "infinie" : $(1, x, x^2, \dots)$ sans limite de puissance...

b) Unicité d'écriture

Théorème 1

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ une famille libre de vecteurs de E. Soit $\vec{u} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$. Alors il existe un unique p-uplet de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ tel que

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_p\vec{u}_p$$

▷ *Preuve :*

◁

A noter : *il existe un "unique" !*
Ce qui est important dans ce résultat, c'est **l'unicité de l'écriture.**
On sait déjà que si $\vec{u} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, $\vec{u}$ est combinaison linéaire des $\vec{u}_i$.
Ici, ce qu'on a obtient en plus dans le cas où la famille est libre, c'est l'unicité de cette combinaison linéaire. **C'est en fait pour avoir cette unicité qu'on définit les bases !**

c) Coordonnées :

Définition 13

Soit E un sous espace vectoriel et $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E. Soit $\vec{u} \in E$. On appelle coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ l'unique p-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k$$

Définition 14

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'un s.e.v E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ (donc $\vec{u} = \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{e}_k$).

On définit la matrice de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice colonne

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exemples

- Dans $E = \mathbb{R}^2$. Soit $u = (0, 2)$ et $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
  Si on prend comme base $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 0))$, alors :

- Dans la base $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ le vecteur $\vec{u} = (2, 1, 1)$ s'écrit
  $$(2, 1, 1) = \mathbf{1}(1, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 1, 1) + \mathbf{1}(1, 0, 1)$$
  Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont donc

▶ Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$ avec la base $(1, x, x^2)$, le polynôme $P(x) = 3x^2 - x + 1$ a pour matrice

Attention :

1. Lorsqu'on travaille de manière matricielle, il faudra systématiquement dire dans quelle base on travaille, sinon, les calculs n'auront aucun sens.
2. Lorsqu'on représente les vecteurs sous forme de matrices, on les représente TOUJOURS avec des colonnes.